

ТОКМАГАМБЕТОВ НАРИМАН САРСЕНОВИЧ

КВАНТТЫҚ ЕСЕПТЕУ ЖӘНЕ ОНЫ БӨЛШЕК ТУЫНДЫЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ ҚОЛДАНУ

**6D060100-Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияның
АННОТАЦИЯСЫ**

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Диссертациялық жұмыс кванттық есептеу және оның бөлшек туындылы дифференциалдық теңдеулердегі қолданыстарына арналған.

Математикада кванттық есептеу кейде шексіз есептеу деп те аталады. Ол шектер түсінігі жоқ дәстүрлі шексіз аз есептеулерге эквивалентті. Оның q -есептеу және h -есептеу деген негізгі екі тармағы бар. Бұл екі тармақтың дамуы ХХ ғасырдың басындағы П.Чеунг пен В.Кас зерттеулерінен бастау алады.

18 ғасырдың басында Л. Эйлер кванттық есептеудің ең көп таралған тілі q -есептеуді ұсынған. Ол 1748 жылы $(q; q)_{\infty}^{-1} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^{k+1}}, |q| < 1$ түрдегі шексіз көбейтіндіні $p(n)$ үшін генератор функциясы ретінде қарастырған ($p(n)$ бөлу функциясын - n санын бүтін сандардың қосындысы ретінде жазудың жолы). Сонымен қатар, ол алғашқы екі q -экспоненциалды функцияны ашты; бұл өз кезегінде q -биномдық теореманың алғышарттары болған. Араға жүз жыл салып, бұл зерттеу процесін Э.Хейн жалғастырған.

1987 жылы q -есептеуді жуықтау теориясы саласында қолдануды алғаш А.Лупас бастады. Ол алғаш рет q -Бернштейн көпмүшелерін енгізді және бұл зерттеулер жақсы дамыды. Зерттеу нәтижелері бойынша маңызды мағлұматтарды кітаптан табуға болады. Сондай-ақ, біз Т. Эрнсттің еңбегін айырықша атап өтеміз. Аталған дереккөзде q -есептеудің тербелістер теориясы, интерполяция теориясы, кванттық топтар, кванттық алгебралар, гипергеометриялық қатарлар, кешенді талдау және бөлшектер физикасы сияқты көптеген пәндер қолданыстары келтіріген.

Бүгінде бұл тақырыптарға деген айтарлықтай қызығушылық пайда болды және q -есептеу соңғы жиырма жыл ішінде математика мен физика арасындағы көпір қызметін атқарды. q -есептеудің математиканың әр түрлі салаларында, мысалы, динамикалық жүйелерде, сандар теориясында, комбинаторикада, арнайы функцияларда, фракталдарда көптеген қолданыстары бар, және ол кейбір қолданбалы салаларда, мысалы, информатика, кванттық механика және кванттық физика сияқты ғылыми мәселелерде кеңінен қолданылады. Қосымша ақпараттың көпшілігін Дж.Гаспер мен М.Рахманның жұмысынан табуға болады, онда көптеген нәтижелер туралы қарапайым дәлелдер (мысалы, q -Клаусеннің формуласы,

q -ортогональды көпмүшеліктер, әртүрлі көбейту формулаларының q -аналогтары және т.б.) және басқа салалардағы маңызды қолданыстары берілген (мысалы, қазіргі алгебра, нақты және кешенді талдау, сандар теориясы және т.б.).

Соңғы үш онжылдықта бөлшек дифференциалдық теңдеулер үлкен назар аударды және физика, химия, биология, сигналдар мен кескіндерді өңдеумен байланысты нақты құбылыстарда кеңінен қолданылды. Сонымен қатар, тағамдық қоспалар, ауа райы және экономика сияқты т.б. әлеуметтік салаларды қамтиды. Осылайша, қарапайым дифференциалдық теңдеулер мен бөлшек туындысы бар дербес туындылы теңдеулерде айтарлықтай даму болды, әртүрлі салаларда осы тақырыпта үлкен көлемде мақалалар мен бірнеше кітаптар шығарылды, мысалы Т. Сандев және З. Томовски, А.А. Килбас және т.б., Р. Хильфер, К.С. Миллер және Б. Росс монографиялары және олардағы сілетемелерді қараныз.

Бөлшек есептеу – математиканың нақты немесе күрделі ретті интегралдау мен дифференциалдауды зерттейтін салаларының бірі. Риман-Лиувилль және Капутоның бөлшек туындысына негізделген бөлшек ретті теңдеулер бүтін ретті теңдеулер үшін бастапқы шарттардың болуын талап етеді. Сәйкесінше, бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер әр саладағы зерттеушілердің қызығушылығын тудырды.

q -айырымдық есептеудің пайда болуын Ф. Джексон және Р.Д. Кармайл жұмыстарынан қарауға болады, бұл жиырмамыншы ғасырдың басы. Жақында У. Альсалам және Р.П. Агарвал q -айырымдық бөлшек есептеуді ұсынды. Бүгінде мүмкін бөлшек q -дифференциалдық есептеулер саласында зерттеулердің күрт өсуінен болар, q -айырымдық бөлшек есептеу теориясындағы жаңа әзірлемелерді бірнеше зерттеушілер кеңінен қарастырған. Мысалы, кейбір зерттеушілер интегралдық және дифференциалдық бөлшек операторлардың қасиеттерінің q -аналогтарын алды.

Осы уақытқа дейін q -айырымдық теңдеулерге үлкен көңіл бөлінгенін айта кеткен жөн. Жылжымайтын нүкте туралы кейбір белгілі теоремаларды қолданумен сызықтық емес q -айырымдық бөлшек теңдеулер үшін шешімдердің бар болуы және жалғыздығы немесе көп болуына арналған бірнеше жұмыстар жарияланды.

Алайда, тұрақты және ауыспалы коэффициенттері бар q -айырымдық теңдеулер теориясы әлі бастапқы кезеңде тұр, және бұл теорияның көптеген аспектітері әлі де зерттеулерді қажет етеді. Бізге белгілі болғандай, Капутоның негізгі бөлшек туындысына негізделген сызықтық, біртекті және біртекті емес айырымдық теңдеулерге арналған Коши есебінің теориясы әлі де даму үстінде.

Демек бөлшек туындылы дифференциалдық теңдеулер шешімдерін табуда кванттық есептеуді, оның ішінде q -есептеуді қолдану өзекті болып табылады.

Жұмыстың мақсаты. Бөлшек туындылы дифференциалдық теңдеулерде кванттық есептеудің ішіндегі q -есептеуді қолдану, олардың шешімдерін табу және олардың бар болуы мен жалғыздығын дәлелдеу.

Зерттеу міндеттері. Қойылған мақсатты іске асыру үшін келесі міндеттерді шешу қажет:

- Риман-Лиувилль бөлшек q -туындысы қатысқан сызықты емес теңдеу үшін Коши тектес есептің және q -Вольтерра интегралдық теңдеуінің эквиваленттігін дәлелдеу. Осы теорема негізінде Коши тектес есептің жалғыз шешімінің бар болуы және жалғыздығы алу;

- Капуто $\alpha > 0$ ретті ${}^c D_{q,0+}^\alpha f$ бөлшек q -туындысы қатысқан сызықты теңдеу үшін Коши тектес есептің жалғыз шешімінің бар болуы және жалғыздығы алу;

- Хильфер бөлшек q -туындысының q -аналогын алу. Хильфер бөлшек q -туындысы қатысқан сызықты емес теңдеу үшін Коши тектес есептің q -Вольтерра интегралдық теңдеуінің эквиваленттігін дәлелдеу. Осы теорема негізінде $L_{\alpha,\beta,q}^1[a,b]$ кеңістігінде Коши тектес есептің жалғыз шешімінің бар болуы және жалғыздығы алу;

- q -Бессель операторымен алынған Шредингер теңдеуінің жаңа модификациясының нақты шешімдерін алу. Бұл шешімнің Соболев тектес $W_q^2(\mathbb{R}_q^+)$ кеңістігінде шешімінің бар болуы және жалғыздығын дәлелдеу.

Зерттеу нысаны. Бөлшек туындылы q -дифференциалдық теңдеулер. Риман-Лиувилль бөлшек q -туындысы қатысқан сызықты теңдеу үшін Коши тектес есебі. Риман-Лиувилль бөлшек q -туындысы қатысқан сызықты емес теңдеу үшін Коши тектес есебі. Капуто бөлшек q -туындысы қатысқан сызықты теңдеу үшін Коши тектес есебі. q -Бессель операторымен берілген Шредингер теңдеуі. Хильфер тектес бөлшек q -туындысы қатысқан сызықты емес теңдеу үшін бөлшек q -дифференциалдық теңдеулер.

Зерттеу әдісі. Диссертациялық жұмыста кванттық есептеудегі бөлшек туындылы q -дифференциалдық теңдеудің шешімін құрып оның жалғыздығын анықтау үшін біртіндеп жуықтау әдісі қолданылды. q -Бессель Фурье түрлендіруін Коши тектес есепке қолдану арқылы қарапайым дифференциалдық теңдеулерге көшу әдістері қолданылды.

Ғылыми жаңалығы. Кванттық есептеуде бөлшек туындылы дифференциалдық теңдеулердің Риман-Лиувилль, Капуто және Хильфер бөлшек q -туындылары арқылы алынған шешімдері.

Қорғауға шығарылатын нәтижелер:

- Риман-Лиувилль бөлшек q -туындысы қатысқан сызықты емес Коши тектес есептің және q -Вольтерра интегралдық теңдеуінің эквиваленттігі туралы теорема дәлелденді. Осы теорема негізінде Коши тектес есептің жалғыз шешімінің бар болуы және жалғыздығы алынды;

- Риман-Лиувилль бөлшек q -туындысы қатысқан кейбір сызықты Коши тектес есептің шешімінің бар болуы және жалғыздығы дәлелденді;

- Капуто $\alpha > 0$ ретті ${}^c D_{q,0+}^\alpha f$ бөлшек q -туындысы қатысқан сызықты Коши тектес есептің шешімінің бар болуы және жалғыздығы дәлелденді;

- q -Бессель операторымен алынған Шредингер теңдеуінің жаңа модификациясының нақты шешімдері алынды. Бұл шешімнің Соболев тектес $W_q^2(\mathbb{R}_q^+)$ кеңістігінде шешімінің бар болуы және жалғыздығы дәлелденді.

- Хильфер бөлшек туындысының q -аналогы алынды.

- Хильфер бөлшек q -туындысы қатысқан сызықты емес Коши тектес есептің q -Вольтерра интегралдық теңдеуінің эквиваленттігі туралы теорема дәлелденді. Осы теорема негізінде $L_{\alpha,\beta,q}^1[a,b]$ кеңістігінде Коши тектес есептің жалғыз шешімінің бар болуы және жалғыздығы алынды.

Алынған нәтижелердің теориялық және практикалық құндылығы. Бұл зерттеу көбіне іргелі болып табылады және бөлшек туындылы дифференциалдық теңдеулерде кванттық есептеуді дамытуға үлкен үлес қосады.

Ізденушінің қосқан жеке үлесі. Диссертацияда ұсынылған зерттеу жұмысы автордың тікелей қатысуымен орындалды. Риман-Лиувилль бөлшек q -туындысы қатысқан сызықты емес Коши тектес есебін және оның Вольтерра интегралдық теңдеуіне эквиваленттілігі дәлелденіп, біртіндеп жуықтау әдісі арқылы шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы теоремалар дәлелденді. Хильфер бөлшек q -туындысының жаңа q -аналогы алынды, және оның Вольтерра интегралдық теңдеуіне эквиваленттілігі дәлелденіп, біртіндеп жуықтау әдісі арқылы шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы теоремалар дәлелденді. Алынған нәтижелер ғылыми мақалалар және ғылыми баяндамалар түрінде жарияланды.

Алынған нәтижелерді апробациялау. Жұмыстың негізгі нәтижелері:

- Студенттер мен жас ғалымдардың «GYLYM JÁNE BILIM – 2020» XV Халықаралық ғылыми конференциясында.(Нұр-Сұлтан, 2020).

- Әбу Насыр Әл-Фарабидің 1150 жылдығы мен Математика және математикалық модельдеу институтының 75 жылдығына арналған Қазақстан ғылым қызметкерлері күніне орай өткізілген дәстүрлі халықаралық сәуір ғылыми конференциясында баяндалды(Алматы, 2020).

- Студенттер мен жас ғалымдардың «GYLYM JÁNE BILIM – 2021» XVI Халықаралық ғылыми конференциясында.(Нұр-Сұлтан, 2021) баяндалды.

- «Тұлғааралық дағдылардың өмір мен ғылыми жетістік үшін маңызы» 1-ші халықаралық ғылыми-практикалық интернет-конференциясында (Украина, 2022) баяндалды

Диссертациялық жұмыстың жеке нәтижелері:

- бір рет «Функционалдық анализ және оның қолданылуы» атты ғылыми семинарында (семинар жетекшілері ҚР ҰҒА академиктері М. Өтелбаев және Р. Ойнаров, профессорлар Е.Д. Нұрсұлтанов, Қ.Н. Оспанов);

- Тромсе университеті-Норвегия Арктикалық университетіндегі математика факультетіндегі профессор Л.-Э. Перссоннің жетекшілігімен болатын ғылыми семинарларда;

- бірнеше рет «Салмақты теңсіздіктер және олардың қолданыстары» атты ғылыми семинарында (семинар жетекшілері ҚР ҰҒА академигі Р. Ойнаров, қауымдастырылған профессорлар А.М. Темирханова, Б.М. Абылаева, доцент М. Алдай) баяндама жасап, талқыланды.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 8 жұмыс, соның ішінде 3 мақала ҚР БҒМ Білім және ғылым саласындағы бақылау комитетімен ұсынылған тізімге кіретін ғылыми басылымдарда, 1 мақала Scopus, Web of Science (Web of Science, Impact factor – 0,988, 2020, Q2) мәліметтер базасында индекстелетін рейтингілі журналда, 4 жарияланым халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында, соның ішінде 1 жарияланым шетелдік халықаралық конференция материалында жарияланды.

Диссертацияның құрылымы және көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспе, үш бөлім, қорытынды мен қолданған әдебиеттер тізімінен тұрады. Диссертацияның жалпы көлемі 76 бет.

Бірінші тарауда екінші және үшінші тараулардың теоремаларын дәлелдеу үшін қажетті барлық формулалар, анықтамалар және леммалар берілген.

Екінші тарауда Риман-Лиувилльдің бөлшек q -туындысы қатысқан сызықты емес теңдеу үшін Коши тектес есебінің моделі қарастырылады. Эквиваленттік теорема дәлелденіп, берілген кеңістікте Коши тектес есептің шешімінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденеді. Сонымен қатар Хильфер туынды операторының q -аналогы да анықталған. Коши тектес q -бөлшек есеп пен Вольтерраның q -интегралданған теңдеуінің эквиваленттік теоремалар дәлелденген

Үшінші тарауда сызықтық бөлшек q -айырымдық теңдеулерінің анық және сандық шешімдері және q -есептеудегі Риман-Лиувилльдің бөлшек q -туындысы қатысқан Коши тектес есептері қарастырылды. Одан бөлек $\alpha > 0$ ретті Капутоның q -бөлшек туындысы қатысқан бөлшек-сызықты q -дифференциалдық теңдеулердің нақты шешімдері құрылған. Сонымен қатар q -Бессель операторымен байланысты Шредингер теңдеуінің жаңа модификациясының нақты шешімдері алынды. Бұл шешімнің Соболев тектес кеңістігінде q -есептеуде бар екендігі туралы теорема дәлелденді.

Қорытындыда алынған нәтижелерге қысқаша талдау жасалып, олардың қолданылу ортасы жайлы баяндалады. Диссертациялық жұмыс пайдаланылған әдебиеттер тізімімен аяқталады.